УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Слънчев бряг, 29 – 31 май 2015 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ – СОФИЯ

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

СЛЪНЧЕВ БРЯГ, 29 – 31 МАЙ 2015 Г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Група А

Задача 1. Дадена е квадратната матрица $A = (a_{k,l})$ от ред $n \geq 2$ с елементи $a_{k,l} = (k-l)^3$. Да се пресметне рангът на матрицата.

Решение: Нека $t_{k,l} = k^3$, $u_{k,l} = 3k^2 l$, $v_{k,l} = 3kl^2$ и $w_{k,l} = l^3$. Тогава $A = T - U + V - W$, $rank\ B = rank\ A$. Имаме $rank\, T = rank\, U = rank\, V = rank\, W = 1$, следователно $rank\, A \leq 4$. Понеже

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\,, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 & -27 \\ 1 & 0 & -1 & -8 \\ 8 & 1 & 0 & -1 \\ 27 & 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1296$$

то $rank\, A = 2$ за $n = 2, 3$ и $rank\, A = 4$ за $n \geq 4$.

Задача 2. а) Да се докаже, че ако функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворява условията

1) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ за всички $x,\ y \in \mathbb{R}$

и

2) съществува константа c, за която $f(x) \leq cx$ за всяко $x \in \mathbb{R}$,

то $f(x) = cx$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

б) Да се докаже, че горното твърдение не е вярно, ако $\mathbb{R}$ се замени с $[0, +\infty)$.

Решение: а) Имаме (за всеки $x,\ y \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = f((x-y)+y) \leq f(x-y) + f(y) \leq c(x-y) + f(y) \quad , \quad \text{или}$$

$$f(x) - cx \leq f(y) - cy \quad .$$

С размяна на местата на x и y получаваме противоположното неравенство, откъдето

$$f(x) - cx = f(y) - cy \quad \text{за всеки} \quad x,\ y \in \mathbb{R} \quad .$$

При $y = 0$ намираме $f(x) - cx = f(0)$. От друга страна първото условие (при $x = y = 0$) ни дава $f(0) \geq 0$, а второто (при $x = 0$) ни дава $f(0) \leq 0$, т.е. $f(0) = 0$.

б) За случая $[0, +\infty)$ разглеждаме функцията $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. За всеки $x,\ y \in [0, +\infty)$ имаме

$$f(x+y) = \frac{x+y}{x+y+1} = \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{x+y+1}$$
$$\leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = f(x) + f(y) \, .$$

Неравенствата $f(x) \leq x$ за $x \geq 0$ и $f(x) < x$ за $x > 0$ също са ясни.

Задача 3. Да се пресметне сумата на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n^4+n^2+1)} \, .$$

Решение: Имаме

$$\frac{1}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{n-1}{n^2-n+1}\right),$$

откъдето получаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n^4+n^2+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{n-1}{n^2-n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{n-1}{n^2-n+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n}{n^2+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{n-1}{n^2-n+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - a_0\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{e}{2} \, .$$

Група Б

Задача 1. В Декартова координатна система с начало O са дадени елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и точка M_0 от нея. Ако M е точка от елипсата, да се пресметне максималното лице на триъгълника OM_0M.

Решение: Нека $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$ са параметричните уравнения на елипсата. Тогава лицето на триъгълника OM_0M е равно на

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{OM_0} \times \overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}|(a\cos t_0, b\sin t_0, 0) \times (a\cos t, b\sin t, 0)| \\ &= \frac{ab}{2}|\sin(t - t_0)|. \end{aligned}$$

Следователно най-голямата стойност на S е равна на $\frac{ab}{2}$. Тъй като тя се достига при $t = t_0 \pm \frac{\pi}{2}$, то следва, че при всеки избор на точката M_0 най-голямото лице на триъгълника OM_0M е равно на $\frac{ab}{2}$.

Задача 2. Дадена е матрицата $A = A(x) = (x-1)I+E$, където E е единичната матрица от трети ред, а I е матрица от трети ред, на която всички елементи са единици.

а) Да се реши уравнението $\det A(x) - e^{2-x} - 3 = 0$.

б) Да се пресметне A^{2015}.

в) Да се пресметнат най-малката и най-голямата стойности на функцията
$$f(x) = \det A^n - \det A^{n+1}$$
в интервала $[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: а) Матрицата е 3x3 и като се използва например правилото на Сарус, се намира $\det A(x) = 3x-2$. Уравнението има вида $3x - e^{2-x} - 5 = 0$. Непосредствено се установява, че $x = 2$ е решение. Функцията $\phi(x) = 3x-e^{2-x}-5$ е непрекъсната и растяща в интервала $(-\infty, +\infty)$ $(\phi'(x) = 3 + e^{2-x} > 0)$, следователно $x = 2$ е единственото решение на уравнението.

б) Очевидно $I^2 = 3I$. По формулата за Нютонов бином:

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[(x-1)I\right]^k E = \\
&= E + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x-1)^k I^k = \\
&= E + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-1)^k 3^{k-1} I = \\
&= E + \tfrac{I}{3} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[3(x-1)\right]^k .1^{n-k} - \tfrac{I}{3} = \\
&= \tfrac{1}{3}\left[(3E-I) + (3x-2)^n I\right] = \\
&= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} (3x-2)^n+2 & (3x-2)^n-1 & (3x-2)^n-1 \\ (3x-2)^n-1 & (3x-2)^n+2 & (3x-2)^n-1 \\ (3x-2)^n-1 & (3x-2)^n-1 & (3x-2)^n+2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

в) $\det A^n = (3x-2)^n$, $\det A^{n+1} = (3x-2)^{n+1}$. Следователно функцията $f(x) = (3x-2)^n - (3x-2)^{n+1}$, като $f(0) = 3(-2)^n$ и $f(1) = 0$. Производната $f'(x) = 3(3x-2)^{n-1}\left[3n+2-(3n+3)x\right]$ се нулира за $x = \frac{2}{3} \in (0,1)$ и $x = \frac{3n+2}{3n+3} \in (0,1)$. При n - нечетно $f(x)$ има единствен локален екстремум: $f_{\max}\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, следователно

$$\min_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = 3(-2)^n \text{ и}$$

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

При n - четно $f(x)$ има два локални екстремума: $f_{\min}\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ и $f_{\max}\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, следователно $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = f(1) = 0$ и $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = 3.2^n$.

Задача 3. Функцията $f(x)$ има производна в интервала $[0, 2015]$ и $f(0) = f(2015) = 0$. Докажете, че съществуват числа $x, y \in (0, 2015)$ такива, че $f'(x) = 2015f(x)$ и $f(y) = 2015f'(y)$.

Решение: Нека $g(x) = f(x).e^{-kx}$. Тогава $g(0) = g(2015) = 0$. По теоремата на Рол съществува $z_k \in (0, 2015)$ такова, че $g'(z_k) = 0$. Но $g'(x) = f'(x).e^{-kx} - k.f(x).e^{-kx}$. За $x = z_k$ получаваме $f'(z_k) = k.f(z_k)$. За $k = 2015$ и $k = \frac{1}{2015}$ следва твърдението.

Група В

Задача 1. Дадени са функциите $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ и $g(x) = \dfrac{x^{2015}}{x-1}$. Да се докаже, че $\dfrac{f^{(2015)}(x)}{g^{(2015)}(x)}$ е константа.

Решение: В сила е представянето

$$g(x) = \frac{x^{2015} - 1 + 1}{x - 1} = x^{2014} + x^{2013} + \cdots + x + 1 + f(x).$$

Тогава имаме $f^{(2015)}(x) = g^{(2015)}(x)$, следователно $\dfrac{f^{(2015)}(x)}{g^{(2015)}(x)} = 1$.

Задача 2. Дадени са кривата $h : \dfrac{x^2}{1-b} + \dfrac{y^2}{b} = 1$ $(b < 0)$ и правата $l : x - 3y = 0$, които се пресичат в точките A и B. Да се пресметне стойността на параметъра b, за която отсечката AB има минимална дължина.

Решение: Координатите на пресечните точки са решения на системата $\left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{1-b} + \frac{y^2}{b} = 1 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y^2 = \frac{b(1-b)}{8b+1} \\ x = 3y \end{array} \right.$. От условието следва, че тя трябва да има две решения (кривата h пресича правата l в две точки). Понеже $b < 0$, то $b \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Пресечните точки на h и l имат координати: $A\left(-3\sqrt{\frac{b(1-b)}{8b+1}}, -\sqrt{\frac{b(1-b)}{8b+1}}\right)$ и $B\left(3\sqrt{\frac{b(1-b)}{8b+1}}, \sqrt{\frac{b(1-b)}{8b+1}}\right)$, а дължината на отсечката AB е $|AB| = \sqrt{\frac{40b(1-b)}{8b+1}}$. Трябва да се намери най-малката стойност на функцията $f(b) = \frac{b(1-b)}{8b+1}$ в интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Производната $f'(b) = \frac{-8b^2-2b+1}{(8b+1)^2}$, функцията $f(b)$ намалява в интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и расте в интервала $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$. Следователно при $b = -\dfrac{1}{2}$ има единствен локален екстремум, който се явява и най-малката ѝ стойност.

Задача 3. Нека P е сумата от всички 2×2 матрици, чиито елементи са числата 0, 1, 2 и 3, без да се повтарят. Да се пресметнат матриците:

а) $S = \dfrac{1}{36}P$;

б) S^{2015} ;

в) $S^{2015} - M^{2015}$, където $M = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: а) Всяка матрица с търсеното свойство може да се отъждестви с пермутация на числата 0, 1, 2 и 3. Така всяка от цифрите 0, 1, 2 и 3 се намира на една и съща позиция в точно шест различни пермутации. Следователно всеки елемент на матрицата P ще бъде равен на $6 \cdot (0+1+2+3) = 36$.

Оттук следва, че $P = \begin{pmatrix} 36 & 36 \\ 36 & 36 \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) За ниските степени на S забелязваме равенствата $S^1 = 2^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^0 \cdot S$, $S^2 = 2^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^1 \cdot S$, $S^3 = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot S$, т.е. ако допуснем, че $S^k = 2^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{k-1} \cdot S$, то използвайки равенствата $S^{k+1} = S^k \cdot S$ и $S^2 = 2 \cdot S$ по метода на математическата индукция получаваме верността на равенството $S^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot S$, за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Следователно $S^{2015} = 2^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{2014} \cdot S$.

в) За да намерим матрицата M^{2015}, първо ще разгледаме степените на матрица от вида $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. За тези матрици с помощта на формулите за синус и косинус на сума и метода на математическата индукция лесно се доказва равенството $\Phi^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

Сега като вземем предвид, че $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ можем да запишем матрицата M по следния начин $M = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$. Следователно

$$\begin{aligned} M^{2013} &= 2^{2013} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{2013\pi}{3} & -\sin\frac{2013\pi}{3} \\ \sin\frac{2013\pi}{3} & \cos\frac{2013\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= 2^{2013} \cdot \begin{pmatrix} \cos 671\pi & -\sin 671\pi \\ \sin 671\pi & \cos 671\pi \end{pmatrix} \\ &= 2^{2013} \cdot \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \\ &= 2^{2013} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тъй като $M^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned} M^{2015} &= M^{2013} \cdot M^2 \\ &= 2^{2014} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончателно получаваме

$$S^{2015} - M^{2015} = 2^{2014} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ

проф. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София — председател

проф. дмн Гено Петков Николов, СУ „Св. Климент Охридски“
проф. д-р Владимир Тодоров Тодоров, УАСГ – София
проф. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София
доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна
гл. ас. д-р Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“
гл. ас. д-р Илияна Петрова Раева, РУ „Ангел Кънчев“
гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“
ас. Паскал Николаев Пиперков, ВТУ „Св.св.Кирил и Методий“

ЖУРИ на НСОМ 2015

Председател:

проф. д-р Владимир Тодоров Тодоров, УАСГ – София;

Членове:

проф. дмн Гено Петков Николов, СУ „Св. Климент Охридски”;
проф. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София;
проф. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София;
доц. д-р Веселин Ненков Ненков, ТУ – Габрово;
доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна;
гл. ас. д-р Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски”;
гл. ас. д-р Илияна Петрова Раева, РУ „Ангел Кънчев”;
гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски”;
ас. Петър Василев Стоев, УАСГ – София;
ас. Паскал Николаев Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий”.

Организационен комитет

доц. д-р Станислава Стоилова - УАСГ - председател
проф. д-р Владимир Тодоров - УАСГ
доц. д-р Иван Димитров - УАСГ
доц. д-р Симеон Стефанов - УАСГ
ас. Петър Стоев - УАСГ
ас. Магдалина Узунова - УАСГ
ас. д-р Данаил Брезов - УАСГ
ас. Паскал Пиперков - ВТУ