НСОМ, Созопол,
2 юни 2007

Група Б

<u>Задача 1:</u> Нека A и B са $n \times n$ реални матрици. Да се докаже, че $\det(A-B)\,.\det(A+B) \;\leq\; (\det A)^2$, ако :

а) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

б) $rank\ B = 1$.

<u>Решение:</u> б) Съществуват обратими $n \times n$ реални матрици P и Q, за които

$$PBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Полагаме $\overline{A} = PAQ$ и $\overline{B} = PBQ$. Достатъчно е да докажем неравенството

$$\det\left(\overline{A}-\overline{B}\right).\det\left(\overline{A}+\overline{B}\right) \;\leq\; \left(\det\overline{A}\right)^2 \quad ,$$

исканото ще получим с умножаване с $(\det P.\det Q)^2$. Но

$$\det\left(\overline{A}-\overline{B}\right) = \det\overline{A} - \overline{A_{11}}\ , \quad \det\left(\overline{A}+\overline{B}\right) = \det\overline{A} + \overline{A_{11}}\ ,$$

където $\overline{A_{11}}$ е адюнгираното количество на $\overline{a_{11}}$. Следователно твърдението на задачата се свежда до елементарното неравенство

$$\det\left(\det\overline{A}\right)^2 - \left(\overline{A_{11}}\right)^2 \;\leq\; \left(\det\overline{A}\right)^2 \quad .$$

а) Следва непосредствено от б). $\square$

Задача 2: Да се докаже, че уравнението

$$\frac{2x}{1+x^4} + \cos x = \frac{\pi}{4} + \sin 1$$

има решение в интервала $(0,1)$.

Решение: Нека $f(x) = arctg x^2 + \sin x$. За тази функция, в интервала $[0,1]$, са в сила условията от теоремата на Лагранж. Тогава $\exists\ c \in (0,1)$, такова, че $f'(c) = f(1) - f(0)$, т.е.

$$\frac{2c}{1+c^4} + \cos c = \frac{\pi}{4} + \sin 1.$$

Забележка: Може и да се пресметне $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^4} + \cos x$ в някои точки, например $g(0) < \frac{\pi}{4} + \sin 1$, $g(\frac{1}{2}) > \frac{\pi}{4} + \sin 1$. $\square$

Задача 3: Да се пресметне определеният интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(4^x+1)(x^2+4)} \quad .$$

Решение:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(4^x+1)(x^2+4)} &= \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(4^x+1)(x^2+4)} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(4^x+1)(x^2+4)} \\
&= \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(4^{-x}+1)(x^2+4)} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(4^x+1)(x^2+4)} \\
&= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(x^2+4)} \left(\frac{1}{4^{-x}+1} + \frac{1}{4^x+1} \right) dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4} \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$