# НСОМ, Созопол,
# 2 юни 2007

## Група В

<u>Задача 1:</u> Да се пресметне рангът на квадратната матрица $A = (a_{k,l})$ от ред $n \geq 2$, за която $a_{k,l} = (k+l)^2$ .

<u>Решение:</u> Нека $b_{k,l} = k^2$, $c_{k,l} = 2kl$ и $d_{k,l} = l^2$ . Тогава $A = B + C + D$ . Имаме $rank\ B = rank\ C = rank\ D = 1$ , следователно $rank\ A \leq 3$ . Понеже

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ , то}$$

$rank\ A = 2$ за $n = 2$ и $rank\ A = 3$ за $n \geq 3$ . □

<u>Задача 2:</u> Нека $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ е непрекъсната функция такава, че за всяко $a > 0$ уравнението $f(x) = ax$ има решение в интервала $[1, +\infty)$ .

а) Да се докаже, че за всяко $a > 0$ уравнението $f(x) = ax$ има безброй много различни решения.

б) Възможно ли е $f$ да е строго растяща?

<u>Решение:</u> а) Да допуснем, че съществуват $a > 0$ и $b > 1$ такива, че $f(x) \neq ax$ за всяко $x \in [b, +\infty)$ . Понеже $f$ и $ax$ са непрекъснати в $x \in [b, +\infty)$ , то са възможни два случая:

1) $f(x) > ax$ за всяко $x \in [b, +\infty)$ . Полагаме $c = \inf\limits_{x \in [1,b]} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x_0)}{x_0} > 0$ (поради теоремата на Вайерщрас). Тогава $f(x) > \dfrac{\min(a,c)}{2} x$ за всяко $x \in [1, +\infty)$ , което противоречи на условието.

2) $f(x) < ax$ за всяко $x \in [b, +\infty)$ . Полагаме $c = \sup\limits_{x \in [1,b]} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$ (поради теоремата на Вайерщрас). Тогава $f(x) < 2\max(a,c)\, x$ за всяко $x \in [1, +\infty)$ , което също противоречи на условието. Следователно за

всяко $a > 0$ и всяко $b > 1$ уравнението $f(x) = ax$ има решение $x_b > b$ , което ни позволява за всяко $a > 0$ да построим индуктивно строго растяща (безкрайна) редица от корени на уравнението $f(x) = ax$ .

б) Да. Полагаме $x_0 = 1$ и $x_{2k+2} = (2k+2)! + 1,\ x_{2k+1} = (2k+2)!$ за $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и, съответно, $y_0 = 1$ и $y_{2k+2} = (2k+3)!,\ y_{2k+1} = (2k+1)!+1$ за $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ . Разглеждаме функция $f : [1,\ +\infty\,) \to (0,\ +\infty\,)$ , за която $f\,(x_n) = y_n$ и $f$ е линейна във всеки от интервалите $[x_n,\ x_{n+1}]$ , $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ . $f$ е строго растяща, защото $y_n < y_{n+1}$ за всяко $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ . От друга страна,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\,(x_{2k})}{x_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)!}{(2k)!+1} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{f\,(x_{2k+1})}{x_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)!+1}{(2k+2)!} = 0\,,$$

следователно, поради непрекъснатостта, $\dfrac{f(x)}{x}$ взема всяка стойност в интервала $(0,\ +\infty)$ . $\square$

Задача 3: През началото на координатната система $Oxy$ и точка $P(t,t^2)$, $t \neq 0$, е построена права $p$. Точката $M(x_M, y_M)$ е симетрична на точката $N(t,0)$ относно правата $p$.

а) Да се изразят координатите $x_M$ и $y_M$ като функции на $t$;

б) Да се намери най-голямата стойност на $x_M + y_M$ за $t \in [-1,0) \cup (0,+\infty)$.

Решение: а) Точка P лежи на параболата $\pi : y = x^2$. $MO = ON = t$ $\Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = t^2$ (1). $MP = PN = t^2 \Rightarrow MP^2 = t^4 = (x_M - t)^2 + (y_M - t^2)^2$ (2). Решава се системата (1) и (2):

$$\left|\begin{array}{l} x_M^2 + y_M^2 = t^2 \\ x_M^2 - 2tx_M + t^2 + y_M^2 - 2t^2 y_M + t^4 = t^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_M^2 + y_M^2 = t^2 \\ t(t - x_M - t y_M) = 0 \end{array}\right. .$$

От $t \neq 0 \Rightarrow x_M = t - t y_M$. Замества се в (1):

$$t^2 - 2t^2 y_M + t^2 y_M^2 + y_M^2 = t^2 \Leftrightarrow (1+t^2) y_M^2 - 2t^2 y_M = 0.$$

Ако $y_M = 0 \Rightarrow x_M = t$ и $M \equiv N$, т.е. не е симетрична на $N$.

Остава $y_M = \frac{2t^2}{1+t^2}$ и $x_M = t - \frac{2t^3}{1+t^2} = \frac{t-t^3}{1+t^2} \Rightarrow M\left(\frac{t-t^3}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right)$.

б) $x_M + y_M = \frac{-t^3+2t^2+t}{1+t^2} = f(t)$.

$$f'(t) = \frac{(-3t^2+4t+1)(1+t^2) - 2t(-t^3+2t^2+t)}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t)(t^3+t^2+5t+1)}{(1+t^2)^2}.$$

Означава се $g(t) = t^3 + t^2 + 5t + 1$, $g'(t) = 3t^2 + 2t + 5 > 0$ за $\forall t$ $\Rightarrow g(t)$ е растяща и уравнението $g(t) = 0$ има само един корен $t_0$. Тъй като $g(-1) = -4 < 0, g(0) = 1 > 0$, то $t_0 \in (-1, 0)$. Следователно $g(t) = (t - t_0)\varphi(t)$, като $\varphi(t) > 0$ за $\forall t \Rightarrow f'(t) = (1 - t)(t - t_0)\frac{\varphi(t)}{(1+t^2)^2}$. Функцията $f(x)$ расте за $t \in (t_0, 0) \cup (0, 1)$ и намалява за $t \in (-1, t_0) \cup (1, +\infty)$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната за $\forall t$, $f(-1) = 1$ и $f(1) = 1$, то

$$\underset{t \in [-1,0) \cup (0,+\infty)}{MAX} f(t) = f(-1) = f(1) = 1.$$