НСОМ, Велико Търново, 13 май 2006

Група Б

Задача 1: Нека $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. Намерете всички корени на уравнението $f_n(x) = 0$.

Решение: Най-напред ще докажем по метода на мат. индукция, че при $|x| \geq 1$ имаме $f_n(x) \geq 1$. Наистина в този случай $f_1(x) = 2x^2 - 1 \geq 1$ и ако $f_k(x) \geq 1$, то $f_{k+1}(x) = f_1(f_k(x)) \geq 1$.

Следователно корените на $f_n(x) = 0$ са в интервала $(-1, 1)$. Числата в този интервал можем да разглеждаме във вида $x = \cos t$ и тогава

$$f_1(x) = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t,\ \ f_2(x) = f_1(\cos 2t) = \cos 4t,$$

$$f_3(x) = f_1(\cos 4t) = \cos 8t.$$

Ако $f_k(\cos t) = \cos 2^k t$ получаваме, че $f_{k+1}(\cos t) = f_1(\cos 2^k t) = \cos 2^{k+1} t$. Оттук следва, че

$$f_n(\cos t) = 0 \Leftrightarrow \cos 2^n t = 0 \Leftrightarrow 2^n t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{2^n}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$$

Отговор: Корените са $\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{2^n})$, като различните корени получаваме при $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

Задача 2: Дадени са точките: $A(2, -1, 2)$, $B(1, 0, -1)$, $C(3, 2, 1)$, $D(1, -1, 0)$ и $E(1, 1, 1)$. Да се намери обема на тялото $ABCDE$.

Решение: Уравнението на равнината α, определена от точките A, B и C е $\alpha : 8x - 4y - 4z - 12 = 0 \iff \alpha : 2x - y - z - 3 = 0$. Намират се разстоянията от точки D и E до α:

$$|\delta(D, \alpha)| = \left| \frac{2.1 - (-1) - 3}{\sqrt{6}} \right| = 0 \Rightarrow D \in \alpha,$$

$$|\delta(E,\alpha)| = \left|\frac{2.1-1-1-3}{\sqrt{6}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow E \notin \alpha.$$

Изследва се разположението на точките A, B, C и D от равнината α. Фиксира се т. A, разглеждат се векторите $\overrightarrow{AB} = (-1,1,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,3,-1)$ и $\overrightarrow{AD} = (-1,0,-2)$ и се изчисляват векторните произведения

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8,-4,-4) = 4.(2,-1,-1),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2,1,1) = (-1).(2,-1,-1).$$

Тъй като $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ са ненулеви, колинеарни вектори $(\perp\alpha)$ с противоположни посоки, то в равнината α точките C и D са в различни полуравнини спрямо правата AB. Следователно тялото с върхове дадените точки е пирамида с основа четириъгълникът $ACBD$ и височина $h_E = |\delta(E,\alpha)| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ през върха E. Обемът му е

$$V = V_{ABCE} + V_{ABDE} = \frac{h_E}{3}(S_{ABC} + S_{ABD}) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}\left(4\sqrt{6}+\sqrt{6}\right) = \frac{5}{2}.$$

Забележка: Диагоналите и видът на четириъгълника с върхове в точките A, B, C, D могат да се установят по следния начин. Точките A и B лежат, например, в равнината $\beta : x+y-1=0$ и ориентираните разстояния от т. C и т. D до нея са с различни знаци: $\delta(C,\beta).\delta(D,\beta) < 0$. Следователно, т. C и т. D са в различни полуравнини спрямо AB. По същия начин равнината $\gamma : x-2y+4z-3=0$ съдържа точките C, D и $\delta(A,\gamma).\delta(B,\gamma) < 0$, т.е. A и B са в различни полуравнини относно правата CD. Тогава $ACBD$ е изпъкнал четириъгълник с диагонали AB и CD. Тогава ако φ е ъгълът между $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ по диагоналите, то

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|} = \frac{(-1,1,-3).(-2,-3,-1)}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}, \quad \text{откъдето}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{4}{11.14}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}. \quad \text{Тогава}$$

$$S_{ACBD} = \frac{|AB|\,.\,|CD|\sin\varphi}{2} = \frac{\sqrt{11}.\sqrt{14}.5\sqrt{6}}{2.\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$

и

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.h = \frac{1}{3}.\frac{5}{2}\sqrt{6}.\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Задача 3: Дадена е функцията

$$f(x) = a_1 \operatorname{tg}(b_1 x) + a_2 \operatorname{tg}(b_2 x) + \cdots + a_n \operatorname{tg}(b_n x)$$

където $n \in \mathbb{N}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Да се докаже, че ако съществува константа $C > 0$, за която е изпълнено неравенството $|f(x)| \leq C|\operatorname{tg} x|\ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq C$$

Решение: Производната

$$f'(x) = \frac{a_1 b_1}{\cos^2 b_1 x} + \frac{a_2 b_2}{\cos^2 b_2 x} + \cdots + \frac{a_n b_n}{\cos^2 b_n x}$$

е непрекъсната в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и

$$f'(0) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

при което $f(0) = 0$. От тук се получава, че

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| = |f'(0)| = \left|\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}\right| =$$

$$= \left|\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right| \leq C \lim_{x \to 0} \left|\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right| = C.$$