НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ

проф. дпн Сава Гроздев, ВУЗФ - София – председател

проф. дмн Гено Николов, СУ „Св. Климент Охридски“
проф. д-р Русанка Петрова, ШУ „Еп. Константин Преславски“
доц. д-р Владимир Бабев, СУ „Св. Климент Охридски“
доц. д-р Владимир Тодоров, УАСГ - София
доц. д-р Иван Трендафилов, ТУ - София
доц. д-р Росен Николаев, ИУ - Варна
гл. ас. д-р Петър Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“
гл. ас. Паскал Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

ЖУРИ

проф. д-р Русанка Петрова, ШУ „Еп. Константин Преславски“
председател

проф. дмн Гено Николов, СУ „Св. Климент Охридски“
проф. дмн Иво Михайлов, ШУ „Еп. Константин Преславски“
проф. дмн Рони Леви
проф. дпн Сава Гроздев, ВУЗФ - София
доц. д-р Владимир Бабев, СУ „Св. Климент Охридски“
доц. д-р Владимир Тодоров, УАСГ - София
доц. д-р Иван Трендафилов, ТУ - София
доц. д-р Росен Николаев, ИУ - Варна
гл. ас. д-р Веселин Ненков, ТУ - Габрово
гл. ас. д-р Петър Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“
гл. ас. Илияна Раева, РУ „Ангел Кънчев“
гл. ас. Паскал Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

Група А

Задача 1. Пресметнете границата:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{4^2+\ \cdots\ +\sqrt{4^{n-1}+\sqrt{4^n}}}}} \qquad .$$

Решение: За $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 1$ е изпълнено:

$$\left|\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}\,\right| = \frac{|a-b|}{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}} \leq \frac{|a-b|}{2} \, .$$

Следователно

$$\left|\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{4^2+\ \cdots\ +\sqrt{4^{n-1}+\sqrt{4^n}}}}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{4^2+\ \cdots\ +\sqrt{4^{n-1}+\sqrt{4^n}+1}}}}\,\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad .$$

Понеже

$$\sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{4^2+\ \cdots\ +\sqrt{4^{n-1}+\sqrt{4^n}+1}}}} = 2 \, ,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{4^2+\ \cdots\ +\sqrt{4^{n-1}+\sqrt{4^n}}}}} = 2 \, .$$

Задача 2. Нека f е непрекъсната периодична функция с период $T > 0$.

а) Докажете, че f притежава периодична примитивна тогава и само тогава, когато $\int\limits_0^T f(x)\,dx = 0$.

б) Докажете, че $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int\limits_0^T tf(t)\,dt$ е единствената периодична примитивна на f, за която $\int\limits_0^T F(x)\,dx = 0$.

Решение: а) Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ с период T, то $F(T) - F(0) = \int\limits_0^T f(x)\,dx = 0$. Обратно нека F е примитивна на f. Образуваме разликата $g(x) = F(x+T) - F(x)$. Тогава $g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. Значи g е някаква константа, да речем C. Тогава $C = g(0) = F(T) - F(0) = \int\limits_0^T f(x)\,dx = 0$, за да е вярно, че $F(x+T) = F(x)$ за всяко x.

б) Ясно е, че всяка примитивна на f има вида

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + c.$$

Искаме да е изпълнено равенството $\int\limits_0^T F(x)\,dx = 0$. Получаваме последователно

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_0^T F(x)\,dx &= \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^x f(t)\,dt \right) dx + c\int\limits_0^T dx \\ &= T\int\limits_0^T f(t)\,dt - 0\int\limits_0^0 f(t)\,dt - \int\limits_0^T tf(t)\,dt + cT \end{aligned}$$

(интегрирахме по части). Ако $\int\limits_0^T F(x)\,dx = 0$, то трябва да е изпълнено $-\int\limits_0^T tf(t)\,dt + cT = 0$, откъдето $c = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int\limits_0^T tf(t)\,dt$.

Задача 3. Дадени са обратими $n \times n$ матрици A и B, за които $A + B$ е обратима, $AB = BA$ и $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

а) За $n = 2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ намерете матрица B, удовлетворяваща горните условия.

б) Докажете, че за всяко естествено число k матрицата $(A^{2^k} + B^{2^k})^{-1}$ е обратима и $(A^{2^k} + B^{2^k})^{-1} = A^{-2^k} + B^{-2^k}$.

в) За всяко естествено число m намерете число λ_m такова, че $(A^m + B^m)^{-1} = \lambda_m(A^{-m} + B^{-m})$ (можете да предполагате, че $A^m + B^m$ е обратима).

Решение: а) Да отбележим, че очевидно не съществуват реални числа a и b, за които $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, защото това води до равенството $a^2 + ab + b^2 = 0$. Но такива комплексни има: за всяко $a \neq 0$ при $b = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}a$ е вярно, че $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Това води до матрично равенство, ако тълкуваме комплексните числа като матрици. Например ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, то $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

б) Умножаваме равенството $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ с $(A + B)AB$ и получаваме $A^2 + AB + B^2 = 0$ (напомняме, че матриците са комутативни); умножаваме последното с $(AB)^{-1}$ и получваме $AB^{-1} + A^{-1}B = -I$, където I е единичната матрица. Вдигаме последното равенство на квадрат и получаваме $A^2B^{-2} + 2I + A^{-2}B^2 = I$; $A^2B^{-2} + A^{-2}B^2 = -I$ и т.н.

в) Отново умножаваме $(A^m + B^m)^{-1} = \lambda_m(A^{-m} + B^{-m})$ с $(A^m+B^m)A^mB^m$ и получаваме $A^mB^m = \lambda_m(A^m+b^m)^2$; $A^{2m}+(2-\frac{1}{\lambda_m})A^mB^m + B^{2m} = 0$. Умножаваме отново с $A^{-m}B^{-m}$ и получаваме $A^mB^{-m}+(2-\frac{1}{\lambda_m})I+B^mA^{-m} = 0$; $X^m+X^{-m} = c_mI$, където $X = AB^{-1}$ и $c_m = -(2-\frac{1}{\lambda_m})$. В текста по-горе всъщност показахме, че $X + X^{-1} = -I$, затова умножаваме $X^m + X^{-m} = c_mI$ с $X + X^{-1} = I$: $X^{m+1} + X^{m-1} + X^{-m+1} + X^{-m-1} = -c_mI$. Следователно $c_{m+1}I + c_{m-1}I = -c_mI$, откъдето получаваме рекурентното уравнение $c_{m+1} + c_m + c_{m-1} = 0$, при което $c_1 = c_2 = -1$. След стандартни процедури намираме $c_m = 2\cos\frac{2m\pi}{3}$. Оттук $\lambda_m = \frac{1}{2+2\cos\frac{2m\pi}{3}}$.

Група Б

Задача 1. В равнината са дадени точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, координатите са спрямо декартова координатна система. Намерете геометричното място от точките M в равнината, за които е изпълнено $AM^2 - BM^2 = a$, където a е реален параметър.

Решение: Нека точката $M(x,y)$ е от търсеното геометрично множество от точки. Изразяваме $AM^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$, $BM^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$,

$$AM^2 - BM^2 = 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = a\,.$$

Следователно всяка точка от търсеното геометрично място принадлежи на правата

$$\ell: \quad (x_2-x_1)x + (y_2-y_1)y - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + a) = 0\,. \qquad (1)$$

Отбелязваме, че правата ℓ има нормален вектор $\overrightarrow{n}(x_2-x_1, y_2-y_1)$, и следователно е перпендикулярна на правата AB.

Обратно, лесно се проверява, че за произволна точка M от правата ℓ е изпълнено $AM^2 - BM^2 = a$. Окончателно, търсеното геометрично множество от точки е правата ℓ с уравнение (1).

Задача 2. Намерете границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\sin^2\frac{\pi}{4n} + \sin^2\frac{2\pi}{4n} + \sin^2\frac{3\pi}{4n} + \dots + \sin^2\frac{n\pi}{4n}\Big)\,.$$

Решение: Функцията $f(x) = \sin^2\dfrac{\pi x}{4}$ е непрекъсната, и затова е интегруема в интервала $[0,1]$. Величината

$$S_n := \frac{1}{n}\Big(\sin^2\frac{\pi}{4n} + \sin^2\frac{2\pi}{4n} + \sin^2\frac{3\pi}{4n} + \dots + \sin^2\frac{n\pi}{4n}\Big)$$

е Риманова сума (по-точно, голямата сума на Дарбу) за $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1-\cos\frac{\pi x}{2}}{2}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,.$$

Задача 3. Нека $P(x) = \prod\limits_{k=1}^{n}(x - x_k)$, където $n \geq 3$ и $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Ако $x = \xi$ е най-големият корен на $P'(x)$, докажете, че $\xi > \dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}$.

Решение: Да означим $\eta = \dfrac{x_{n-1} + x_n}{2}$. По теоремата на Рол, всичките корени на P' са разположени по един във всеки от интервалите (x_k, x_{k+1}), $k = 1, \dots, n-1$, затова $\xi \in (x_{n-1}, x_n)$. При това, $P'(x) > 0$ за $x > \xi$. От представянето

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$$

получаваме

$$\frac{P'(\eta)}{P(\eta)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\eta - x_k} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\eta - x_k} > 0,$$

понеже $x_k < (x_{n-2} + x_n)/2$ за $k = 1, \dots, n-2$. От $P(\eta) < 0$ следва, че $P'(\eta) < 0$. Следователно P' има нула надясно от η, т. е. $\xi > \eta$.

Група В

Задача 1. Нека полиномът

$$P(x) = (n+1)a_{n+1}x^n + \dots + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

има такива коефициенти, че $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$. Докажете, че уравнението $P(x) = 0$ има поне един реален корен в интервала $(0, 1)$.

Решение: Разглеждаме полинома $Q(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Тогава от условието следва $Q(1) = a_0 = Q(0)$. От теоремата на Рол следва, че $P(x) = Q\,'(x)$ има поне един реален корен в интервала $(0, 1)$.

Задача 2. Дадени са окръжност $k : x^2 + y^2 = 1$, права $l : y = x + a$ ($a \in R$) и точка $C(1, 0)$, като k и l се пресичат в точките A и B. За кои стойности на a лицето на ΔABC е най-голямо?

Решение: Координатите на пресечните точки A и B намираме от системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + a \end{array} \right.$.

Така

$$A\left(\frac{-a - \sqrt{2 - a^2}}{2}, \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}\right)$$

$$B\left(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2},\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}\right)$$

като $a \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Следователно $AB^2 = 2-a^2+2-a^2 = 2\left(2-a^2\right)$, а $d\left(C,l\right) = \frac{|1+a|}{\sqrt{2}}$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2(2-a^2)}\frac{|1+a|}{\sqrt{2}}$ е най-голямо, когато $S^2_{\Delta ABC}$ е най-голямо, следователно трябва да се намери най-голямата стойност на функцията $f(a) = (1+a)^2\left(2-a^2\right)$ за $a \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2\left(1+a\right)\left(2-a^2\right) - 2a\left(1+a\right)^2 \\ &= 2\left(1+a\right)\left(-2a^2-a+2\right) = 0, \end{aligned}$$

откъдето $a_1 = -1$, $a_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Максималното лице е при $a = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

Задача 3.

а) Докажете, че за произволни естествени числа n, a, b, c числото

$$(a+b\sqrt{c})^n + (a-b\sqrt{c})^n$$

е четно.

б) Намерете

$$\lim_{n\to\infty}(2+\sqrt{3})^n \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right).$$

Решение: а) В развитието на Нютоновия бином нечетните степени на $b\sqrt{c}$ са с противоположни знаци и се унищожават, а тези с четни степени съвпадат. Оттук следва твърдението.

б) От а) имаме $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2A_n$ — четно число, $(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}&\left\{(2+\sqrt{3})^n \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}\sin\left(\pi(2A_n-(2-\sqrt{3})^n)\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{(-\pi)\frac{\sin\left(-\pi(2-\sqrt{3})^n\right)}{-\pi(2-\sqrt{3})^n}\right\} = -\pi. \end{aligned}$$