НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

16.05.2009 г.

ГРУПА А

Задача 1. Нека A е квадратна матрица от ред m, която удовлетворява уравнението $A^2 - 2A + 2I = O$, където I и O са съответно единичната и нулевата матрици от ред m.

а) За всяко $n \in \mathbb{N}$ да се намерят такива числа α_n и β_n, за които $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.

б) Да се пресметне $(I - zA)^{-1}$ за всяка допустима стойност на $z \in \mathbb{C}$.

Решение. а) Да отбележим, че A е обратима. Наистина $A^2-2A = -2I$; $A(A-2I) = -2I$ и за матрицата $B = \frac{1}{2}(2I-A)$ получваме $AB = I$. След това за всяко $n \in \mathbb{N}$ ще бъде изпълнено $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$, защото $A^2 = 2A - 2I$ и по индукция се вижда, че за всяка степен $n \in \mathbb{N}$ може да се намерят константи α_n и β_n, за които$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. Умножаваме уравнението $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ с A и получаваме

$$A^{n+1} = \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n(2A - 2I) + \beta_n A = (2\alpha_n + \beta_n)A - 2\alpha_n I.$$

От друга страна $A^{n+1} = \alpha_{n+1}A + \beta_{n+1}I$ и по този начи се получава системата

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -2\alpha_n \end{array} \right. .$$

В първото уравнение заместваме n с $n+1$ и от второто се получава, че $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} - 2\alpha_n$. Решението на това рекурентно уравнение е стандартно; получва се

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_n = \frac{1}{2i}\left((1+i)^n - (1-i)^n\right) = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4} \\ \beta_n = i\left((1+i)^{n-1} - (1-i)^{n-1}\right) = 2^{\frac{n+1}{2}} \sin\frac{(n-1)\pi}{4} \end{array} \right. ,$$

където $i = \sqrt{-1}$. Окончателно се получава

$$A^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\sin\frac{n\pi}{4} A + \sqrt{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{4} I \right) .$$

б) Ще търсим матрицата $(I - zA)^{-1}$ като сума на безкрайна „геометрична“ прогресия:

$$(I - zA)^{-1} = I + zA + z^2A^2 + \cdots + z^nA^n + \cdots .$$

От горното получваме, че

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n = I + \left(\frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} ((1+i)^n - (1-i)^n) z^n \right) A + \left(i \sum_{n=1}^{\infty} ((1+i)^n - (1-i)^n) z^n \right) I.$$

Коефициентите в този израз са суми на геометрични прогресии, които са сходящи при $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и след стандартни пресмятания получаваме

$$(I - zA)^{-1} = \frac{1}{2z^2 - 2z + 1} \left((1 - 2z)\, I + z\, A \right) .$$

Да отбележим, че този израз **има смисъл за всяко** z, което не е корен на уравнението $2z^2 - 2z + 1 = 0$ и елементарна проверка показва, че $\frac{1}{2z^2-2z+1}(I - zA)\left((1-2z)\, I + z\, A\right) = I$. Значи това е обратната матрица на $I - zA$ за всяко z, за което $2z^2 - 2z + 1 \neq 0$. Нека след това $z_{1,2}$ са корените на $2z^2 - 2z + 1 = 0$. Матриците $I - z_{1,2}A = -z_{1,2}(A - \frac{1}{z_{1,2}}I)$ не са обратими, защото $\frac{1}{z_{1,2}}$ са собствени числа на A. Последното е вярно с изключение на случаите, когато $A = \operatorname{diag}(z_i, z_i, \ldots, z_i)$, където z_i; $i = 1, 2$ са корените на $2z^2 - 2z + 1$.

Задача 2. За $p \in \mathbb{N}$ нека $q(p)$ е най-малкото естествено число, за което

$$2^{p.q(p)} - \left(2^p - 1\right)^{q(p)} \geq \left(2^p - 2\right)^{q(p)} .$$

Да се докаже, че редицата $\left\{ \dfrac{q(p)}{2^p} \right\}_{p=1}^{\infty}$ е сходяща. Да се намери границата ѝ.

Решение. От дефиницията на $q(p)$ имаме

$$1 < \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{q(p)-1} + \left(1 - \frac{2}{2^p}\right)^{q(p)-1} = M(p) \quad \text{и}$$

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{q(p)} + \left(1 - \frac{2}{2^p}\right)^{q(p)} = L(p) .$$

От неравенствата

$$0 < M(p) - 1 \leq M(p) - L(p) \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} \quad \text{и} \quad 0 \leq 1 - L(p) \leq M(p) - L(p)$$

намираме $\lim\limits_{p\to\infty} M(p) = \lim\limits_{p\to\infty} L(p) = 1$. От друга страна

$$\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{2^p} + \left(1 - \frac{2}{2^p}\right)^{2^p} < \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} < 1 \quad ,$$

което означава, че $0 < \dfrac{q(p)}{2^p} \leq 1$. Ако l е граница на сходяща подредица $\left\{ \dfrac{q(p_k)}{2^{p_k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$, то $1 = \lim\limits_{k\to\infty} L(p_k) = \dfrac{1}{e^l} + \dfrac{1}{e^{2l}}$. Последното уравнение има единствено решение.

Следователно редицата $\left\{ \dfrac{q(p)}{2^p} \right\}_{p=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{q(p)}{2^p} = \ln 2 - \ln\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Задача 3. Нека $\mathcal{F}$ е множеството от всички функции $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$, които имат непрекъсната втора производна, $f(0) = f(\pi) = 0$ и $f(x)f''(x) \geq -\sin^2 x$ за всяко $x \in [0;\pi]$. Да се намери най-голямата стойност на

$$\int\limits_0^\pi f'(x)\cos x\,dx$$

при $f \in \mathcal{F}$.

Решение. С интегриране по части намираме

$$\int\limits_0^\pi (f'(x))^2\,dx = f(\pi)f''(\pi) - f(0)f''(0) - \int\limits_0^\pi f(x)f''(x)dx \leq \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \quad .$$

От неравенството на Коши получаваме

$$\int\limits_0^\pi f'(x)\cos x\,dx \leq \sqrt{\int\limits_0^\pi (f'(x))^2\,dx \int\limits_0^\pi \cos^2 x dx} \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

За $f(x) = \sin x$ имаме равенство.

ГРУПА Б

Задача 1. За всяка матрица X, с X^T означаваме нейната транспонирана, а с I_n означаваме единичната матрица от ред n, $n \in \mathbb{N}$.

а) Нека H е 3×2 матрица, за която $H^T H = I_2$, а A е квадратната матрица, определена от равенството $A = I_3 - 2HH^T$. Да се пресметне $\det A$.

б) Нека H е $n \times m$ матрица, за която $H^T H = I_m$, където $n > 3$ и $m \leq n$, а A е квадратната матрица, определена от равенството $A = I_n - 2HH^T$. Да се пресметне $\det A$.

Решение. а) По условие $H = [h_1 h_2]$, където стълбовете h_1 и h_2 са два реални ортонормирани 3×1 вектора. Нека h_3 е реален нормиран 3×1 вектор, за който $h_3 \perp h_1$ и $h_3 \perp h_2$, т. е. B е 3×3 матрица със стълбове h_1, h_2 и h_3. Последователно намираме

$$AB = (I_3 - 2HH^T)[h_2 h_2 h_3] = (I_3 - 2HH^T)[H h_3]\,,$$

$$AB = [(I_3 - 2HH^T)H(I_3 - 2HH^T)h_3] = [(H - 2HH^T H)(h_3 - 2HH^T h_3)]\,,$$

$$AB = [(-H)h_3]\,,$$

понеже $HH^TH = H(H^TH) = HI_2 = H$ и $H^Th_3 = O$. От тук получаваме

$$\det(AB) = \det([(-H)h_3]) = (-1)^2 \det([Hh_3]) = \det B\,.$$

Следователно $\det A = 1$, понеже $(\det B)^2 = 1 \neq 0$.

б) Разглежданото по-горе разсъждение се обобщава по очевиден начин.

Задача 2. а) Да се докаже, че

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\,.$$

б) Нека $a = BC$ и $b = AC$ са катетите на правоъгълния триъгълник ABC ($a \leq b$) и $\sphericalangle CAB = \alpha$. За всяко естествено число n полагаме

$$\alpha_n = \frac{a}{b} - \frac{a^3}{3b^3} + \frac{a^5}{5b^5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a^{2n-1}}{(2n-1)b^{2n-1}}\,.$$

Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Решение. а) Нека $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$. Техните производни са равни съответно на $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и $g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n+1}x^{2n-2} + (-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}$. След като се пресметне сумата на прогресията в g' получаваме, че $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f'(x)$. Значи $\operatorname{arctg} x = C + g(x)$ за някоя константа C. Полагаме в последното равенство $x = 0$ и получаваме $C = 0$.

б) В подточка а) полагаме $x = \dfrac{a}{b}$. Да забележим, че $x \in (0, 1]$. Значи

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) = \alpha_n + r_n(x)\,,$$

където $r_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$. За да докажем, че $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ е достатъчно да се убедим, че остатъкът клони към нула. Това не е трудно:

$$|r_n(x)| = \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \leq \int\limits_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \leq \int\limits_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1}\,,$$

което завършва доказателството.

Задача 3. Дадени са точките $A(0;0)$, $B(12;0)$ и $C_0(3;3\sqrt{3})$. Нека C_n, $n \in \mathbb{N}$, е центърът на вписаната в $\triangle ABC_{n-1}$ окръжност. Да се докаже, че съществува точка P, за която $\lim\limits_{n\to\infty} |C_nP| = 0$. Да се пресметнат координатите на P.

Решение. Нека $\alpha_n = \sphericalangle BAC_n$, $\beta_n = \sphericalangle ABC_n$. Тогава $\alpha_n = \dfrac{\alpha_0}{2^n}$ и, следователно, точките на сгъстяване на редицата $\{C_n\}_0^\infty$ лежат на отсечката AB . Ако P е граница на подредица $\{Cn_k\}_{k=1}^\infty$, то

$$\frac{AP}{BP} = \lim_{k\to\infty} \frac{ACn_k}{BCn_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\beta n_k}{\sin\alpha n_k} = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \quad .$$

Следователно редицата $\{C_n\}_0^\infty$ има единствена точка на сгъстяване $P(4;0)$.

ГРУПА В

Задача 1. Дадена е детерминантата

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x-3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-n+1 \end{vmatrix} .$$

а) Да се реши неравенството $D_4(x) \le 0$.

б) Да се пресметне $D_n(x)$.

Решение. а) Пресмятаме детерминантата

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

като умножаваме последователно втория, третия и четвъртия ред по (-1) и го прибавяме съответно към първия, втория и третия ред:

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 4-x \\ 1 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} .$$

Тази детерминанта развиваме по елементите на първия стълб и получаваме

$$\begin{aligned} D_4(x) &= (x-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-1 & 3-x & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ x-1 & 3-x & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(x-1)(x-2)(x-3) - (2-x)(3-x)(4-x) = \\ &= (x-2)(x-3)(x^2-x-3) . \end{aligned}$$

Трябва да решим неравенството

$$(x-2)(x-3)(x^2-x-3) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0\,.$$

Следователно $x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 2\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 3\right]$.

б) Преобразуваме детерминантата $D_n(x)$, като всеки ред след първия умножаваме по (-1) и го прибавяме към предходния:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 3-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 4-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & n-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-n+1 \end{vmatrix}\,.$$

Получената детерминанта развиваме по елементите на първия стълб и преобразуваме:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= (x-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x-1 & 3-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & n-x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-n+1 \end{vmatrix} \\ &\quad +1.(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x-1 & 3-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 4-x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+2 & n-x \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) + (-1)^{n+1}(2-x)(3-x)\dots(n-x) = \\ &= (x-2)(x-3)\dots(x-n+1)\left[(x-1)^2 + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x-n)\right] = \\ &= (x-2)(x-3)\dots(x-n+1)(x^2-x-n+1)\,. \end{aligned}$$

Задача 2. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редицата, определена с

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n+a_n}\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots\,.$$

Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение. След логаритмуване се получава $a_n = n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n$. Пресмята се

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ n^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - n \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{1}{2} + o(1) - n \right) = -\frac{1}{2} \, .$$

Задача 3. а) Да се докаже неравенството $\ln(1+x) \le x$, $x \in (-1;+\infty)$.

б) Нека a, b и c са страните на $\triangle ABC$ и $\gamma \le \dfrac{\pi}{2}$ е ъгълът срещу c. Да се докаже, че

$$\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \le e^{-\frac{ab\cos\gamma}{a^2+b^2}} \, .$$

В кои случаи се достигат равенства?

Решение. а) Означаваме $f(x) = \ln(1+x) - x$. Тогава $f'(x) = -\dfrac{x}{x+1}$, откъдето $\max\limits_{x\in(-1;\infty)} f(x) = f(0) = 0$. Следователно $f(x) \le 0$.

б) Дясното неравенство следва от неравенството $\ln(1+x) < x$. Наистина, ако положим в него $x = -\dfrac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2}$, то

$$1 + x = 1 - \frac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}{a^2+b^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2} \, .$$

Значи $\ln\dfrac{c^2}{a^2+b^2} \le -\dfrac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2}$, $\dfrac{c^2}{a^2+b^2} \le e^{-\frac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2}}$, след което коренуваме.

За доказателството на лявата част е достатъчно да се забележи, че $\frac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2} \le \cos\gamma$, защото $\frac{2ab}{a^2+b^2} \le 1$. Значи $1 - \frac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2} \ge (1-\cos\gamma) = 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$; $\frac{c^2}{a^2+b^2} \ge 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$.