Íàöèîíàëíà ñòóäåíòñêà îëèìïèàäà ïî ìàòåìàòèêà'2008

07.06.2008 ã.

ÃÐÓÏÀ À

Çàäà÷à 1. Íåêà G å àäèòèâíà èçáðîèìà àáåëåâà ãðóïà, íà êîÿòî âñÿêà êðàéíî ïîðîäåíà ïîäãðóïà å áåçêðàéíà öèêëè÷íà ãðóïà. Äà ñå äîêàæå, ÷å G å èçîìîðôíà íà ïîäãðóïà íà àäèòèâíàòà ãðóïà Q íà ðàöèîíàëíèòå ÷èñëà.

Çàäà÷à 2. Äàäåíà å ôóíêöèÿ $f : [0;1] \to [0;1]$.

à) Àêî f å íåïðåêúñíàòà, äà ñå äîêàæå, ÷å ñúùåñòâóâà òàêîâà $x_0 \in [0;1]$, ÷å $f(x_0) = x_0$.

á) Àêî f å ðàñòÿùà, äà ñå äîêàæå, ÷å ñúùåñòâóâà òàêîâà $x_0 \in [0;1]$, ÷å $f(x_0) = x_0$.

â) Ñúùåñòâóâà ëè íàìàëÿâàùà ôóíêöèÿ f òàêà, ÷å $f(x) = x$ çà âñÿêî $x \in [0;1]$?

Çàäà÷à 3. Ðåäèöàòà $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ óäîâëåòâîðÿâà óñëîâèåòî $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k^2}{n-k}$ çà $n \geq 2$.

à) Àêî $a_1 \geq \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}$ äà ñå äîêàæå, ÷å $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

á) Äà ñå äîêàæå, ÷å ñúùåñòâóâà $c > 0$, çà êîåòî $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, çà ïðîèçâîëåí èçáîð íà $a_1 \in [0; c]$.

Íàöèîíàëíà ñòóäåíòñêà îëèìïèàäà ïî ìàòåìàòèêà'2008

07.06.2008 ã.

ÃÐÓÏÀ Á

Çàäà÷à 1. Â äåêàðòîâà êîîðäèíàòíà ñèñòåìà òî÷êèòå ñ êîîðäèíàòè $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ è $(0;0;1)$ ñà âúðõîâå íà êóá. Äà ñå íàìåðè ñóìàòà îò äúëæèíèòå íà êðèâèòå, ïîëó÷åíè îò ïðåñè÷àíåòî íà ñòåíèòå íà êóáà ñ ïîâúðõíèíàòà $z = x^2 + y^2 - 2xy$.

Çàäà÷à 2. Íåêà $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2008x - x^2}$ è $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Äà ñå äîêàæå, ÷å çà âñÿêî $n \in N$ å èçïúëíåíî $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+2}$.

Çàäà÷à 3. Êâàäðàòíàòà ìàòðèöà A ñå íàðè÷à öèðêóëàíòà, àêî âñåêè íåéí ðåä ñå ïîëó÷àâà ïîñðåäñòâîì ïðåìåñòâàíå ñ åäíà ïîçèöèÿ íàäÿñíî íà åëåìåíòèòå íà ïðåäõîäíèÿ ðåä, êàòî ïîñëåäíèÿò åëåìåíò ñå ðàçïîëàãà íà ïúðâà ïîçèöèÿ. Òîâà îçíà÷àâà, ÷å âñÿêà öèðêóëàíòà A ñå îïðåäåëÿ îò ïúðâèÿ ñè ðåä $a_0; a_1; \ldots; a_n$ è ñå îçíà÷àâà òàêà: $(a_0; a_1; \ldots; a_n)$. Íàïðèìåð, $A = (a_0; a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}; a_n)$ å ìàòðèöàòà

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_0 \end{pmatrix} :$$

Íåêà ìàòðèöèòå A è B ñà öèðêóëàíòè.

à) Àêî X å öèðêóëàíòàòà $(0; 1; 0; \ldots; 0)$, à A å $(a_0; a_1; \ldots; a_n)$, äà ñå äîêàæå, ÷å

$$A = a_0E + a_1X + \ldots + a_nX^n;$$

êúäåòî E å åäèíè÷íàòà ìàòðèöà.

á) Àêî $Y = AB$, äà ñå äîêàæå, ÷å $Y = BA$ è ÷å ìàòðèöàòà Y ñúùî å öèðêóëàíòà.

Íàöèîíàëíà ñòóäåíòñêà îëèìïèàäà ïî ìàòåìàòèêà'2008

07.06.2008 ã.

ÃÐÓÏÀ Â

Çàäà÷à 1. Íåêà

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x & 1 & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & x & 1 \end{vmatrix} .$$

à) Äà ñå ïðåñìåòíå D_n;

á) Äà ñå ðåøè íåðàâåíñòâîòî $x^{2k+1} + 1 \geq D_{2k+1}$.

Çàäà÷à 2. Íåêà $f(x) = \dfrac{1}{x}$ çà $x > 0$. Â äåêàðòîâà êîîðäèíàòíà ñèñòåìà ñ íà÷àëî O òî÷êàòà B ëåæè âúðõó ãðàôèêàòà íà $f(x)$, à òî÷êàòà A å âúðõó àáñöèñíàòà îñ òàêà, ÷å $OB = AB$. Äà ñå íàìåðè íàé-ãîëÿìàòà ñòîéíîñò íà ðàäèóñà íà âïèñàíàòà îêðúæíîñò â òðèúãúëíèêà OAB.

Çàäà÷à 3. Äà ñå ïðåñìåòíå

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n}{n}}}{n} .$$